پاسخنامه تشریحی مرحله اول سی و دومین المپیاد کشوری - اسفند ۱۳۸۵

کد برگه ۱

(۱) حد تفکیک تلسکوب در صورتی طول موج هایی بزرگتر باشد با قطر زاویه‌ای برج مسکونی از ماه برابر باشد:

$$\alpha^{rad} = A.R^{rad}$$

$$\alpha = \frac{h}{d} = \frac{430\ m}{3.84\times10^{8}\ m} = \frac{\text{ارتفاع برج مسکونی}}{\text{فاصله ماه از زمین}}$$

$$A.R^{rad} = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\ \frac{700\ nm}{D}$$

$$\Rightarrow \frac{430}{3.84\times10^{8}} = 1.22\frac{700\times10^{-9}\ m}{D} \Rightarrow D = 0.76m = 76cm$$

گزینه ۲

(۲) اصطلاب پدیده‌ای برای اندازه‌گیری زاویه‌ها در آسمان است و برای تعیین موقعیت اجرام سماوی به کار می‌رود. گزینه ج

(۳) فرض می‌کنیم دیسک‌دارها نیروی گرانشی بر یکدیگر وارد نمی‌کنند، زیرا فاصله دیسک‌دار از نزدیک‌ترین همسایه‌اش خیلی زیاد است. در این صورت، دو دیسک‌دار روی یک مدار به دور خورشید گردش می‌کنند و چون طبق قانون دوم کپلر در زمان‌های برابر سطوح یکسانی را جاروب می‌کنند، پس هیچ‌گاه با یکدیگر برخورد نمی‌کنند. دقت کنید دیسک‌دارها چون روی یک مدار هستند، پس حرکت مشابهی دارند. گزینه ج

نکته ۳: اگر فرض نکنیم که دیسک‌دارها بر یکدیگر نیروی گرانشی وارد می‌کنند، کاری که در عمل اتفاق می‌افتد، مسأله بسیار دشوار می‌شود. با این فرض دیسک‌دار بخشی از جرم خود را در هر حضیض خورشیدی از دست می‌دهد و پس از چندین گردش به دور خورشید (چندده یا چند صد گردش) محو می‌شود. مسأله را با اطلاعات موجود می‌توان به چندین شکل مجسم کرد که هر یک به ازای بخشی از گزینه‌های موجود (البته غیر از گزینه الف) حتم می‌شود. در این صورت شاید گزینه د مناسب‌ترین گزینه باشد.

(۴)

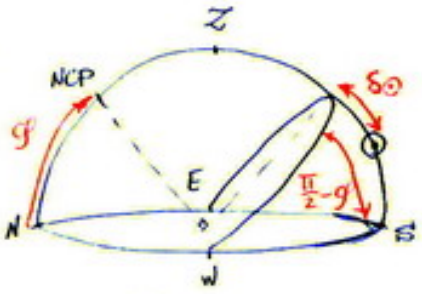
$$B = B_\lambda \cdot \lambda \Rightarrow \begin{cases} B_{200\,nm} = a(204-200)_{nm} = 4a\ Wm^{-2} \Rightarrow B_1 = 4a \\ B_{500\,nm} = 2a(502-500)_{nm} = 4a\ Wm^{-2} \Rightarrow B_2 = 4a \end{cases}$$

$$m_2 - m_1 = -\frac{5}{2}\log\frac{B_2}{B_1} = -\frac{5}{2}\log\frac{4a}{4a} = -\frac{5}{2}\log 1 = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0$$

گزینه ج

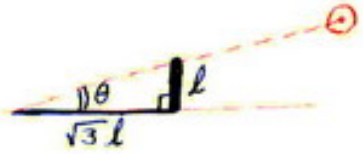
$\delta_\odot = -23.5^\circ$ میل خورشید در روز اول دی

۵) همان طور که در شکل می بینیم، ارتفاع خورشید در ظهر اول دی را از شکل زیر بدست می آید:




$$alt_\odot = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta_\odot = \frac{\pi}{2} - 23.5^\circ - \varphi = 63.5^\circ - \varphi \quad *$$

با توجه به شکل هندسی سایه می توان ارتفاع خورشید را بدست آورد.




$$tg\,\theta = \frac{l}{\sqrt{3}l} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = alt_\odot = 30^\circ$$

$$^*\ 63.5^\circ - \varphi = 30^\circ \Rightarrow \varphi = 36.5^\circ$$

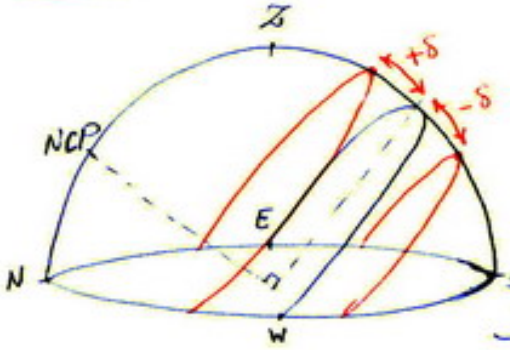
گزینه ج

---

۶) میدان مغناطیسی زمین در عایق بر جسم خارجی دیگر، همانند میدان مغناطیسی یک آهن ربا است. اما به دلیل برهم کنش با میدان مغناطیسی خورشید، در یک جهت فشرده و در جهت دیگر کشیده شده است. بنابراین انحراف محور مغناطیسی زمین با محور دورانش نیز بیشتر از ۱۰ درجه است. گزینه د

---

۷) آسمان شهرها را از لحظه ای که از شهرهای عرض جغرافیایی میانه است به خوبی مشخص است. همان طور که در شکل می بینیم، دو ستاره با میل های مختلف در آسمان طی می کنند، متفاوت هستند و چون سرعت گردش این اجسام همان یک دور در شبانه روز است، پس زمان حضور آنها بر فراز افق نیز متفاوت است.

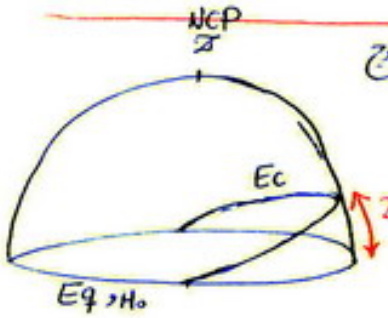



هر ستاره دو عبور دارد، عبور بالایی و عبور پایینی که از آنجایی که این دو عبور ۱۲ ساعت اختلاف دارند، بنابراین دو ستاره ای که در حال عبور دیده می شوند، می توانند هم عبور باشند یا این که ۱۲ ساعت اختلاف عبور داشته باشند.

با این توضیحات جمله الف درست است. گزینه الف

---

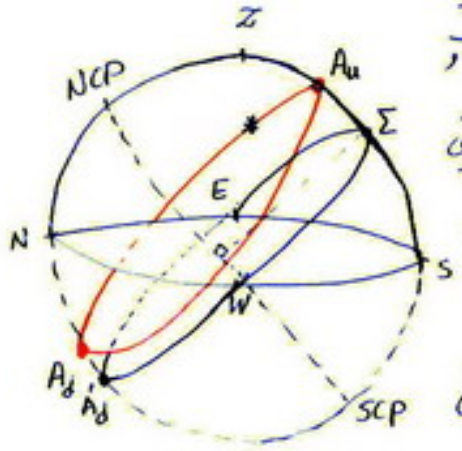
۸) در آسمان ناظر قطبی، نصف شمال آسمان در سه سو قرار دارد و استوای سماوی روی افق قرار می گیرد. (این اشتباه است)




نیز چون با استوای سماوی اختلاف زاویه دارد، نیمی بالای افق و نیمی در زیر افق قرار دارد.

اما گردش وضعی در افق حول محوری است که از سه سو به زمین عمود می شود، بنابراین صفحه وضعی همان سماوی افق است و در هر شش ساعت، ارتفاع اجسام سماوی از افق ثابت می ماند. گزینه ب

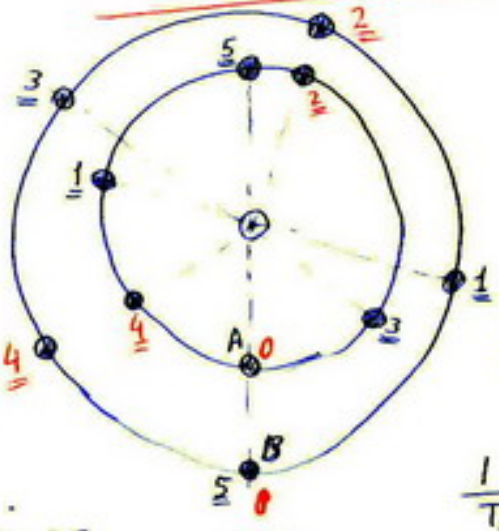
(۹) ستاره در مسیر حرکت خود وقتی از معدل النهار (نصف النهار ناظر) عبور می‌کند، در اوج بالایی است و وقتی از دایره ساعتی قرینه نصف النهار ناظر عبور می‌کند (NCP – N – SCP)، در عبور پایینی است. زاویه ساعتی نیز به واسطه نقطه $\Sigma$ با محل تقاطع دایره ساعتی ستاره و دستوای سماوی در جهت ساعتگرد گفته می‌شود.




همان طور که در شکل دیده می‌شود، ستاره در موقعیت $A_d$ در عبور پایینی است. محل تقاطع دایره ساعتی ستاره و استوای سماوی $A'_d$ است و زاویه $A'_d$، $\Sigma$، $180^\circ$ یا $12$ ساعت است. گزینه ج

(۱۰) گزینه ب — اصول ریاضی فلسفه طبیعی همان پرینسیپیا است و از جلودان ایزاک نیوتن است. المجسطی نیز نوشته بطلمیوس است.

(۱۱) سیاره درونی دو مقارنه دارد، مقارنه داخلی که سیاره خورشید و ناظر قرار می‌گیرد و مقارنه خارجی که سیاره پشت خورشید و روی خط واصل ناظر و خورشید قرار می‌گیرد.




مقارنه داخلی: $\underline{0}$ ، $\underline{2}$ ، $\underline{4}$
مقارنه خارجی: $\underline{1}$ ، $\underline{3}$ ، $\underline{5}$

چون فاصله زمانی بین هر مقارنه، نصف دوره تناوبی سیاره درونی است، پس می‌توان دوره تناوبی را با توجه به فرض مسأله به دست آورد:

$$5 \times \frac{T_s}{2} = 1\,yr \Rightarrow T_s = \frac{2}{5}\,yr$$

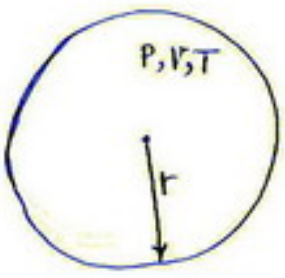
حال از رابطه دوره تناوبی، دوره یکی سیاره را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}$$

$$\frac{1}{2/5} = \frac{5}{2} = \frac{1}{T_A} - 1 \rightarrow \frac{1}{T_A} = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2} \Rightarrow T_A = \frac{2}{7}\,yr$$

گزینه د

(۱۲)




$$P \propto \frac{1}{r} \Rightarrow P = \frac{k}{r}$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\frac{PV}{T} = \text{ثابت}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{k}{r} \times \frac{4}{3}\pi r^3}{T} = \frac{4\pi k}{3} \cdot \frac{r^2}{T} = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{r^2}{T} = \text{ثابت}$$

چون هوای داخل حباب محبوس است، پس می‌توان رابطه گازهای کامل را بین دو حالت زیر به کار گرفت:

$$\frac{r_0^2}{T_0} = \frac{r^2}{T}$$
$$T = \frac{T_0}{2}$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{r_0^2}{2} \Rightarrow r = \frac{r_0}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_0$$

گزینه الف

(۱۳) زمان نوردهی برای ستاره‌ای به میل $\delta$ از رابطه $t = \frac{1000}{f.\cos\delta}$ بدست می‌آید که در آن $f$ نماینده‌ی قانون لورنتز است.

ناصر قطبی، زاویه میل ستاره است، پس داریم:

$$t = \frac{1000}{f\cos(\frac{\pi}{2}-p)} = \frac{1000}{f\sin p}$$

حال نسبت این دو زمان را بدست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= \frac{1000}{f\sin p} \\ t &= \frac{1000}{f\sin 2p} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{t}{t_0} = \frac{\frac{1000}{f\sin 2p}}{\frac{1000}{f\sin p}} = \frac{\sin p}{\sin 2p} \quad \left.\begin{aligned} &\Rightarrow \\ &\sin 2p = 2\sin p\cos p \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{t}{t_0} = \frac{\sin p}{2\sin p\cos p} = \frac{1}{2\cos p} = (2\cos p)^{-1}$$

گزینه د

---

(۱۴) یک لامپ صدوالی معمولی، سطح مقطع دایره‌ای (در سیمش) با قطر $D = 5^{cm}$ دارد. تعداد لامپ‌هایی را می‌توان از تقسیم سطح زمین بر سطح لامپ بدست آورد:

$$N \times S_{\text{لامپ}} = S_{\text{زمین}} \Rightarrow N = \frac{4\pi R_{\oplus}^2}{\pi\frac{D^2}{4}} = \frac{16(6.38\times10^{6}_{m})^2}{(5\times10^{-2}_{m})^2} = 2.589\times10^{17}$$

اگر کره‌ی زمین درخشندگی زیادی داشت، باید همین مقدار نور را از سطح کره‌ای به شعاع فاصله‌ی زمین تا خورشید می‌تابید. حجم انرژی تابیده شده:

$$L_{\oplus} = N L_{\text{لامپ}} = 2.589\times10^{17}\times100^{W} = 2.589\times10^{19}\,W$$

شدت درخشندگی زمین در آن حالت: $I_{\oplus} = \frac{L_{\oplus}}{4\pi a_{\oplus}^2}$

$$I_{\oplus} = \frac{2.589\times10^{19}\,W}{4\pi(3.84\times10^{8}_{m})^2} = \frac{2.589\times10^{19}}{1.853\times10^{18}}\cdot\frac{W}{m^2} = 13.972\,\frac{W}{m^2}$$

حال که شدت درخشندگی زمین را بدست آوردیم، می‌خواهیم آن را با تعدادی ستاره مقایسه کنیم. خورشید نزدیک‌ترین ستاره است:

$$\left.\begin{aligned} m_{\odot} &= -26.8 \\ I_{\odot} &= 1.37\times10^{3}\,\frac{W}{m^2} \\ I_{\oplus} &= 13.972\,\frac{W}{m^2} \\ m_{\oplus} &= ? \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_{\oplus} - m_{\odot} = -\frac{5}{2}\log\frac{I_{\oplus}}{I_{\odot}} \Rightarrow m_{\oplus} - (-26.8) = m_{\oplus} + 26.8 = -\frac{5}{2}\log\frac{13.972}{1370}$$

$$\Rightarrow m_{\oplus} + 26.8 = -\frac{5}{2}\log 0.0102 \simeq +5 \Rightarrow m_{\oplus} = -26.8 + 5 = -21.8$$

تردیک‌ترین پاسخ، $m = -23$ است. گزینه الف

---

(۱۵) باد خورشیدی را اثر از دست هیدروژن در نظر می‌گیریم. داریم:

تغییر اندازه حرکت برابر است با برد $\times$ زمان. زمان را بر حسب تغییر مسافت می‌نویسیم و سطح را بر حجم. $\frac{m}{\Delta V}$، همان چگالی جرمی است. داریم:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{m v^2}{A\Delta x} = \frac{m}{\Delta V}v^2 = N m_H v^2$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta P &= \Delta m v = F\Delta t \\ \Delta t &= \frac{\Delta x}{v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{m v^2}{\Delta x}$$

$$P = n m_H v^2 = n(1.67\times10^{-27}_{kg})(300\times10^{3}_{m/s})^2 \Longrightarrow P = 1.5n\times10^{-16}\,N/m^2 \simeq \boxed{10^{-16}\,n\,N/m^2}$$

گزینه ج

۱۶) در مورد سیاهچاله فقط می‌توان شعاع شوارتزشیلد آن را حساب کرد.

$$R_{sch} = \frac{2GM}{c^2}$$

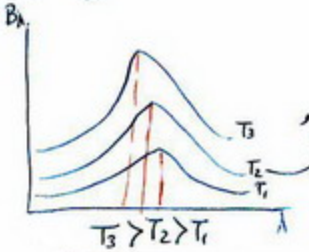
$$R_{sch} = \frac{2(6.67\times10^{-11})(3\times10^{6}M_\odot)(1.99\times10^{30}\frac{kg}{M_\odot})}{(3\times10^{8}\,m/s)^2} = 8.85\times10^{9}\,m = \frac{8.85\times10^{9}\,m}{1.5\times10^{11}\frac{m}{AU}} = 0.059\,AU$$

$$\Rightarrow R_{sch} = 0.06\,AU$$

گزینه ج

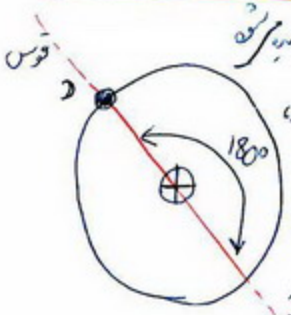
۱۷) این سؤال ابهام دارد. اگر منظور از تابش، بیشترین تابش باشد؛ آنگاه پاسخ د درست است، زیرا طول موج قرمز متناظر با دمای $4000^k$ است و همان طور که می‌دانیم، بیشترین تابش ستارگان رشته اصلی دمای $2500^k$ دارند. پس ستارگان سردتر از $4000^k$، بیشترین تابش در قسمت قرمز و مادون قرمز دارند و ستارگان داغ‌تر از $4000^k$، این تابش‌ها کمتر است.

اگر منظور کل تابش باشد، همان طور که در نمودار تابش جسم سیاه می‌بینیم، تابش‌های با طول موج بیشتر، دمای بالاتری دارند و تابش بیشتر، گرمتر بودن جسم را نشان می‌دهد.




گزینه ب یا د

۱۸) سیر تا صورت فلکی نمی‌گوید جنوبی است و میل منفی دارد پس زیر استوا سمت در همان افق است، دیر می‌شود




۱۹) همان طور که در شکل می‌بینید، خط دید ماه از دید ناظر زمینی با خط دید من از دید ناظر روی ماه $180^\circ$ اختلاف دارد. پس زمین از صورت فلکی ای دیده می‌شود که $180^\circ$ درجه با قوس فاصله دارد. از سوی زمین ماه تقریباً روی دایرةالبروج حرکت می‌کند پس صورت فلکی مورد نظر است که دایرةالبروج عبور می‌کند و با قوس به اندازه $180^\circ$ یا $7$ ماه اختلاف داشته باشد. پاسخ صورت فلکی جوزا است.

گزینه ب

۲۱) با استفاده از مقیاس‌های جدول، مقادیر $T^{-4}$ و $r^2$ را حساب می‌کنیم:

$$T_B^{-4} = 4.5\ ,\ r_B^2 = 4.5$$
$$T_A^{-4} = 1.5\ ,\ r_A^2 = 4.5$$
$$T_C^{-4} = 4.5\ ,\ r_C^2 = 13.5$$

در خنده‌بین هرتسپرونگ-راسل رابطه $L = 4\pi r^2 \sigma T^4$ به دست می‌آید. با کمک گرفتن از $T^{-4}$ و $r^2$ می‌توان $L$ را به دست آورد:

$$L_A = r_A^{2/-4}T_A = r_A^2 T_A^4 = \frac{4.5}{1.5} = 3$$
$$L_B = r_B^2 T_B^4 = \frac{r_B^2}{T_B^{-4}} = \frac{4.5}{4.5} = 1$$
$$L_C = r_C^2 T_C^4 = \frac{r_C^2}{T_C^{-4}} = \frac{13.5}{4.5} = 3$$

$$\Rightarrow L_A = L_C = 3L_B$$

گزینه د

(۲۲) وقتی سطح محدب را با آینه‌ای پوشانیم، سطح را مانند آینه‌ای محدب تبدیل کرده که شعاع آن $R_\oplus$ است. در آینه محدب داریم: $f = \frac{R}{2}$

پس فاصله کانونی این آینه عظیم $f = \frac{R_\oplus}{2}$ است. حال از جسمی به فاصله $p = 3.84\times10^8 m$ تصویر داریم. تصویری مجازی تشکیل می‌شود که می‌توان فاصله آن را از رابطه $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$ اندازه گرفت:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

$$p = 3.84\times10^8 m = \frac{3.84\times10^8 m}{6.38\times10^6 \frac{m}{R_\oplus}} \simeq 60 R_\oplus$$

$$\frac{1}{60R_\oplus}+\frac{1}{q} = -\frac{1}{R_\oplus/2} = -\frac{2}{R_\oplus} \Rightarrow \frac{1}{q} = -\frac{2}{R_\oplus} - \frac{1}{60R_\oplus} = -\frac{120+1}{60R_\oplus} = -\frac{121}{60R_\oplus}$$

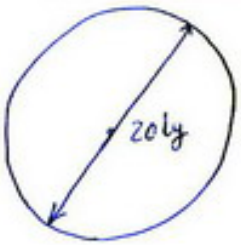
$$\Rightarrow q = \frac{-60}{121} R_\oplus \approx \frac{-R_\oplus}{2}$$

تصویر به کانون تشکیل می‌شود (گزینه الف)

نکته: ناظری که در سطح زمین ایستاده است، انحنای این آینه محدب را حس نمی‌کند و بنابراین آینه را یک سطح تخت حس می‌کند. بنابراین فقط تصویر را در آینه تخت حس می‌کند که فاصله‌اش با آینه برابر است با فاصله جسم تا آینه یعنی شعاع سیاره‌ای و دوربین تعبیه شده در آینه تخت است.

(۲۳) M32 و M31 به کهکشان آندرومدا، M31 است و در صورت تقارن کهکشان بزرگ (آندرومدا) قرار دارد. گزینه ج

(۲۴)




$$m_{H_2} = 2m_H = 2(1.67\times10^{-27}) kg$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \quad , V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{D^2}{8}$$

$$\rho = N m_{H_2} = 10^4 \frac{}{cm^3} \times 3.34\times10^{-27} kg = 3.34\times10^{-23} \frac{kg}{cm^3} = 3.34\times10^{-17} \frac{kg}{m^3}$$

$$cm^3 = 10^{-6} m^3$$

$$\Rightarrow m = 3.34\times10^{-17} \frac{kg}{m^3} \times \frac{4}{3}\pi \times \frac{1}{8}(20\times9.46\times10^{15} m)^3 = 1.184\times10^{35} kg$$

$$\frac{m}{M_\odot} = \frac{1.184\times10^{35} kg}{1.99\times10^{30} kg} = 5.95\times10^4 \approx 6\times10^4 \Rightarrow m = 6\times10^4 M_\odot$$

گزینه ج

(۲۵) هر ستاره در حال عبور دیده می‌شود پس باید هر دو ستاره بالای افق باشند و هیچ‌کدام در حال عبور پایینی نباشد. پس هیچ‌کدام نمی‌توانند در حال عبور پایینی باشند.

حال از این دو ستاره در عبور پایینی حتماً یکی بر نصف‌النهار افق است پس باید دور قطبی باشد.

چون بعد در راستای باد حرکت او را نمی‌بیند پس نقطه W صفر است و نقطه اول گل، γ روی افق قرار دارد. پس زاویه ساعتی نقطه γ برابر است با $\varphi = 60°$ یا $ST = 6^h$ گزینه ب